ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGỤY PHƯƠNG HOÀI

BÀI TOÁN ĐỔI TIỀN CỦA FROBENIUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGỤY PHƯƠNG HOÀI

BÀI TOÁN ĐỔI TIỀN CỦA FROBENIUS

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Hoàng Lê Trường

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Fredinand Georg Frobenius (1849 - 1917) là một nhà toán học người Đức nổi tiếng với những đóng góp trong lý thuyết hàm Eliptic, phương trình vi phân và lý thuyết nhóm. Bài toán Diophantine tuyến tính của ông có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như lý thuyết số, lý thuyết tự động và tổ hợp. Một ví dụ nổi tiếng của bài toán Diophantine tuyến tính của Frobenius là "Bài toán đổi tiền của Frobenius": Cho trước k loại tiền có mệnh giá là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, xác định khoản tiền lớn nhất không thể đổi thành các loại tiền trên. Cũng có nhiều ví dụ trong số học sơ cấp dạng như: Tìm khoản tiền lớn nhất không thể đổi được thành các loại tiền mệnh giá 3 xu, 5 xu, 7 xu.

Bài toán Frobenius đã được giải quyết cho trường hợp hai số. Ta đã biết công thức tính số Frobenius của hai số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau là $ab - a - b$ và số nguyên dương không biểu diễn được qua a, b là $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$. Nhưng việc giải quyết với trường hợp nhiều hơn hoặc bằng 3 số là vô cùng khó và đến nay vẫn là một bài toán mở.

Trong luận văn này, tôi trình bày một cách có hệ thống một vài kết quả quan trọng của Bài toán đổi tiền của Frobenius. Mục tiêu chính của luận văn là trả lời câu hỏi khi nào một khoản tiền cho trước có thể đổi thành những đồng tiền với mệnh giá cho trước, xác định khoản tiền lớn nhất không thể đổi được và xác định có bao nhiêu cách để đổi tiền. Chính vì vậy, chúng tôi đã chọn đề tài “Bài toán đổi tiền của Frobenius” làm chủ đề nghiên cứu cho luận văn.

Bố cục của luận văn gồm mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Trong chương 1, chúng tôi giới thiệu sơ lược về bài toán đổi tiền của

Frobenius, trình bày công thức Frobenius cho trường hợp hai số và kết quả của Sylvester. Bài toán Frobenius cho hai đồng xu và chứng minh định lý của Sylvester cũng được trình bày ở phần cuối Chương 1.

Chương 2 trình bày một số kết quả về trường hợp đặc biệt của bài toán Frobenius cho ba số và cho các tập đặc biệt. Cuối chương này chúng tôi có trình bày hai ví dụ thực tế tương tự với bài toán đổi tiền của Frobenius.

Với tình cảm chân thành, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin, quý thầy cô giáo giảng dạy lớp cao học Toán K10 đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Hoàng Lê Trường, người thầy trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn khoa học. Với những kiến thức, kinh nghiệm quý báu, thầy đã ân cần chỉ bảo giúp đỡ tác giả tự tin, vượt qua những khó khăn, trở ngại trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Xin được bày tỏ lòng biết ơn của tác giả đến các bạn học viên, các đồng nghiệp, người thân đã động viên, giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành khóa học.

Xin chân thành cảm ơn !

Tác giả

Ngụy Phương Hoài

Chương 1

Bài toán đổi tiền của Frobenius

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị như hàm sinh, các ứng dụng của hàm sinh để tìm hàm phân hoạch có giới hạn, từ đó chứng minh được bài toán Frobenius cho hai số nguyên tố cùng nhau. Bài toán Frobenius cùng các ví dụ trong luận văn giúp trả lời câu hỏi số tiền lớn nhất không xuất hiện khi dùng hệ thống tiền mới hay số điểm cao nhất không xuất hiện trong trò chơi là bao nhiêu. Phần cuối của chương cũng trình bày một số kết quả về số Frobenius trong trường hợp ba số và trong trường hợp đặc biệt của cấp số cộng, cấp số nhân.

1.1 Hàm sinh

Hàm sinh có nhiều ứng dụng của toán rời rạc cũng như lý thuyết số. Hàm sinh giúp ta chuyển những bài toán về dãy số thành những bài toán về hàm số. Với điều này chúng ta có thể dễ dàng giải quyết được một số bài toán.

Giả sử chúng ta khảo sát một dãy số vô hạn $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ phát sinh trong hình học hoặc theo kiểu đệ quy (truy hồi). Tìm một "công thức chính xác" để tính giá trị a_k theo chỉ số k? Có bao nhiêu cách xác định a_k khác nhau? Chuyển dãy số này vào hàm sinh

$$F(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

cho phép chúng ta tìm ra câu trả lời cho các câu hỏi trên một cách vô cùng nhanh chóng và dễ dàng. Chúng ta coi hàm $F(z)$ như kết quả của việc chuyển đổi dãy số (a_k) từ hàm rời rạc sang hàm liên tục.

Để minh họa cho các khái niệm này, chúng ta sẽ bắt đầu bằng ví dụ cổ điển về dãy Fibonacci f_k được đặt tên theo tên của nhà toán học Leonardo Pisano Fibonacci và được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \text{ và } f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \text{ với } k \geq 0.$$

Từ đó ta có giá trị dãy số

$$(f_k)_{k=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots).$$

Bây giờ chúng ta hãy xem hàm sinh có thể mang lại kết quả gì cho chúng ta. Nhắc lại hàm sinh của dãy Fibonacci $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ là

$$F(z) := \sum_{k\geq 0} f_k z^k.$$

Chúng ta đặt hai vế của công thức truy hồi vào hàm sinh như dưới đây

$$\sum_{k\geq 0} f_{k+2} z^k = \sum_{k\geq 0} (f_{k+1} + f_k) z^k = \sum_{k\geq 0} f_{k+1} z^k + \sum_{k\geq 0} f_k z^k. \tag{1.1}$$

Vế trái của đẳng thức (1.1) bằng

$$\sum_{k\geq 0} f_{k+2} z^k = \frac{1}{z^2} \sum_{k\geq 0} f_{k+2} z^{k+2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k\geq 2} f_k z^k = \frac{1}{z^2}(F(z) - z).$$

Trong khi đó vế phải của đẳng thức (1.1) có giá trị

$$\sum_{k\geq 0} f_{k+1} z^k + \sum_{k\geq 0} f_k z^k = \frac{1}{z} F(z) + F(z).$$

Theo đó, đẳng thức (1.1) có thể viết lại như sau

$$\frac{1}{z^2}(F(z) - z) = \frac{1}{z} F(z) + F(z),$$

hoặc

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Khi chúng ta khai triển hàm $F(z)$ thành một chuỗi lũy thừa, chúng ta sẽ có được dãy số Fibonacci là hệ số của chuỗi như dưới đây

$$\frac{z}{1-z-z^2} = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + 13z^7 + 21z^8 + 34z^9 + \dots.$$

Bây giờ ta sử dụng phương pháp giải hàm hữu tỷ thường dùng: *phương pháp khai triển phân thức hữu tỷ thành các phân thức hữu tỷ đơn giản.* Xét trường hợp của chúng ta, phần mẫu số là

$$1 - z - z^2 = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)$$

và khi khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản, ta có

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z}. \tag{1.2}$$

Hai biểu thức trên được khai triển thành các chuỗi thông qua chuỗi hình học

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{1.3}$$

với giá trị tương ứng $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}z$ và $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}z$. Từ đó, ta thu được

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0}^{\infty} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) z^k. \end{aligned}$$

So sánh các hệ số của z^k trong định nghĩa $F(z) = \sum_{k\geq 0} f_k z^k$ với các hệ số của z^k trong biểu thức $F(z)$ bên trên, chúng ta nhận được công thức

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

cho dãy Fibonacci.

Phương pháp phân tích một hàm sinh hữu tỷ thành các phân thức đơn giản như trên là một trong những công cụ toán học quan trọng của chúng ta. Bởi vì chúng ta sẽ sử dụng phương pháp phân tích đa thức hữu tỷ thành đa thức đơn giản nên chúng ta phát biểu chuẩn tắc phương pháp này bởi định lý sau đây.

Định lý 1.1.1 (Khai triển phân thức đơn giản)**.** *Cho hàm hữu tỷ*

$$F(z) := \frac{p(z)}{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{e_k}},$$

trong đó p là một đa thức có bậc nhỏ hơn $e_1 + e_2 + \ldots + e_m$ và a_k là các số phân biệt, khi đó tồn tại phép phân tích

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{c_{k,1}}{z-a_k} + \frac{c_{k,2}}{(z-a_k)^2} + \ldots + \frac{c_{k,e_k}}{(z-a_k)^{e_k}} \right),$$

trong đó $c_{k,j} \in \mathbb{C}$ là giá trị duy nhất.

1.2 Hai hệ đồng xu

Hãy tưởng tượng chúng ta đưa ra một hệ thống đồng tiền mới. Thay vì việc sử dụng các đồng 1 cent, đồng 5 cent, 10 cent và 25 cent, chúng ta đồng ý sử dụng các đồng 4 cent, 7cent, 9 cent và 34 cent. Chúng ta có thể chỉ ra được nhược điểm của hệ thống đồng tiền mới này như sau: một vài số tiền trong hệ thống cũ là không thể đổi được sang số tiền trong hệ thống mới (trừ các đồng tiền có sẵn), ví dụ 2 hoặc 5 cent. Tuy nhiên, chính nhược điểm này làm cho hệ thống đồng tiền mới này thú vị hơn hệ thống đồng tiền cũ, vì chúng ta có thể đặt ra câu hỏi "có thể thu được tổng giá trị tiền không đổi được là bao nhiêu?". Thực tế khi sử dụng hệ thống tiền mới này chúng ta có ít hơn tiền cũ và do đó phần dư không đổi được biến mất khỏi thực tế.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra, số tiền lớn nhất không thể đổi có giá trị bao nhiêu? Câu hỏi này đã nhận được câu trả lời đầu tiên bởi Ferdinand Georg

Frobenius (1849-1917), và James Joseph Sylvester (1814-1897). Chúng ta muốn đặt ra một câu hỏi mang tính khái quát chung nhất có thể. Vì thế chúng ta đưa ra câu hỏi còn được gọi là bài toán đổi tiền của Frobenius như sau:

Bài 1.2.1 (Bài toán đổi tiền của Frobenius)**.** *Đối với các đồng tiền có mệnh giá $a_1, a_2, \dots, a_d$ là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1, câu hỏi đặt ra là: có thể đưa ra công thức số tiền lớn nhất không thể có được bằng cách sử dụng đồng tiền $a_1, a_2, \dots, a_d$?*

Để phát biểu cụ thể về mặt toán học, chúng ta có một tập hợp số nguyên dương

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$$

với $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_d) = 1$.

Định nghĩa 1.2.2. Số nguyên dương n được gọi là *biểu diễn được* bằng tập số A trên nếu tồn tại các số nguyên không âm $m_1, m_2, \dots, m_d$ sao cho

$$n = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_d a_d.$$

Ví dụ 1.2.3. Cho tập số $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Khi đó, các số

$$\begin{aligned} 13 &= 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 7, \\ 15 &= 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7, \\ 28 &= 14 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7, \end{aligned}$$

nên chúng biểu diễn được theo A.

Xét về ngôn ngữ đồng tiền, điều này có nghĩa là chúng ta có thể đổi được n thành các đồng xu $a_1, a_2, \dots, a_d$. Bài toán Frobenius (thường được gọi là bài toán Diophantine tuyến tính của Frobenius) yêu cầu chúng ta tìm ra số nguyên lớn nhất không thể biểu diễn thông qua các số nguyên không âm $a_1, a_2, \dots, a_d$ như trên.